ANÁLISIS A PRIORI DE UNA SITUACIÓN DE OPTIMIZACIÓN EN SEGUNDO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Eduardo Lacasta, Universidad Pública de Navarra
Uldarico Malaspina, Pontificia Universidad Católica del Perú
José R. Pascual, Universidad Pública de Navarra
Miguel R. Wilhelmi, Universidad Pública de Navarra

RESUMEN

Se presenta una manera de introducir un problema de optimización en el primer ciclo de Educación Primaria, mediante una transposición didáctica que preserva la esencia de la optimización en un contexto matemático escolar propio de la etapa. Se afronta un problema de este tipo en el tránsito del número natural a la medida, utilizando la ingeniería didáctica como método de investigación. En este marco se diseña una situación didáctica basada en el análisis a priori. El objetivo de esta situación es doble: por un lado, la intervención razonada en los sistemas didácticos; por otra parte, producir conocimiento sobre la forma en la que se construyen y comunican problemas de optimización relativos a la medida, en edad infantil.

***Palabras clave*:** número, medida, acción, manipulación, ingeniería didáctica, programación lineal.

ABSTRACT

We present a way of introducing an optimization problem in the first cycle of Primary Education by means of a didactical transposition that preserves the essence of mathematical optimization in the school level. We propose a problem of this kind in the transit of natural number to measure, using didactical engineering as a research method. In this context, we design a didactical situation based on an a priori analysis. This situation has two objectives: first, the intervention in educational systems; second, obtaining knowledge on the how children construct and communicate problems of optimization (relating to measure).

Keywords: number, measure, action, handling, didactical engineering, linear programming.

Lacasta, E., Malaspina, U., Pascual, J. R., Wilhelmi M. R. (2009). Análisis a priori de una situación de optimización en segundo de Educación Primaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 259-271). Santander: SEIEM.

TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL AL RETO DE LA MEDIDA EN PRIMER CICLO DE PRIMARIA

La noción de función y sus propiedades más notables, así como los métodos clásicos de análisis de situaciones vinculadas a problemas de programación lineal y el lenguaje formal asociado, están fuera de las expectativas curriculares de la educación primaria. Por otra parte, la formalización de los problemas de optimización está ligada al cálculo de extremos de funciones. No obstante, mediante una adecuada *transposición didáctica* (Chevallard, 1985), es posible elaborar y poner en marcha una situación en el primer ciclo de educación primaria, que movilice los conocimientos correspondientes y preserve al mismo tiempo la esencia de la optimización.

Optimización y problemas de programación lineal

Según la RAE (2009), la *optimización* es "acción y efecto de optimizar"; *optimizar* es "buscar la mejor manera de realizar una actividad". Este es el uso que se le da para la educación primaria y secundaria en los documentos oficiales (MEC, 2006, 2007b), que es consistente con la definición intuitiva de problema de optimización que propone Pinto Carvalho (2003, 17). La programación lineal constituye un ámbito de las matemáticas que provee una clase de problemas prototípicos de optimización, que vienen definidos por tres entidades:

- *Variables*. Números reales mayores o iguales a cero ($x_i \geq 0$, donde i varía entre 1 y n; siendo n el número de variables).
- *Restricciones*. Condiciones de ligadura entre las variables. Las restricciones pueden ser de la forma ($R_j \propto \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$, donde: $\propto$ representa "=", "≤" o "≥"; el índice j varía entre 1 y m, siendo m el número de restricciones; a_{ij} son coeficientes reales conocidos y R_j valores reales dados).
- *Función objetivo*. Una función lineal de las variables ($F_{obj}(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$, donde $\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$; b_i son coeficientes reales conocidos), que se trata de maximizar o minimizar.

La optimización en la educación preuniversitaria

En el primer ciclo de educación primaria se consideran situaciones que involucran ya la ordenación de números naturales en forma ascendente o descendente (relaciones de orden "mayor que", "menor que" e "igual que"), ya la medida y comparación de objetos haciendo uso de medidas predefinidas (estándares o arbitrarias), pero no se proponen situaciones de optimización. Más adelante, al final de la Primaria, se introducen las nociones de máximo común divisor (mcd) y mínimo común múltiplo (mcm) de números naturales, aunque de manera algorítmica, sin énfasis en la reflexión del significado de los términos "máximo" o "mínimo".

La programación lineal es uno de los temas de optimización que se introduce en la educación preuniversitaria. En algunos países como Perú es un tema considerado para la formación de todos los estudiantes de quinto de secundaria (MINEDU, 2009); en otros como España, es materia específica para los estudiantes que escogen la rama de

Ciencias Sociales en el bachillerato (MEC, 2007a). El procedimiento estándar, algorítmico y formalizado, es la representación gráfica de las restricciones, el cálculo de los valores extremos de la región delimitada y la selección de punto que maximiza (minimiza) la función objetivo dada.

A pesar de esta dispersión, la "optimización" en la educación preuniversitaria es un tema de actualidad en didáctica de las matemáticas (Villers, 1997; Lowther, 1999; Camacho y González, 2001; Driscoll & Kobylski, 2002; Schuster, 2005; Malaspina, 2008).

ANÁLISIS A PRIORI

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) como método de investigación permite la aplicación normativa o técnica de resultados didácticos. Para ello, se controla *a priori* la puesta en marcha de proyectos de enseñanza y, *a posteriori*, se compara el estudio teórico (elaborado *a priori*) con las realizaciones efectivas (*prueba de la contingencia*). El análisis *a priori* exige la descripción de las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica. En los siguientes apartados se analizan algunos aspectos fundamentales y restricciones que afectan a estas tres dimensiones.

El número y la medida en el primer ciclo de educación primaria

El problema de la medida se suele plantear en el paso del número natural al racional positivo o al conjunto $\mathbf{D}^+$ de los decimales positivos[1]. No obstante, según currículos de la Educación Primaria de diferentes épocas y países, se afronta la medida tempranamente, con el único bagaje numérico del número natural. Para su movilización, el soporte simbólico es la "semirrecta natural", es decir, la sucesión de puntos equidistantes[2] sobre una semirrecta, en cuyo origen se representa el cero. Por ello, a esta edad se presume, como se ha dicho anteriormente, la capacidad infantil de ordenar números naturales y medir y comparar objetos.

¿Puede tener sentido un problema de optimización en el tránsito del número natural a la medida? Responder a esta pregunta supone, necesariamente, contextualizar los conocimientos que se podrán movilizar, precisar cuáles son los saberes pretendidos por los currículos y prever los tipos de errores y obstáculos que podrían presentarse.

Restricciones cognitivas

El paso del pensamiento preoperatorio (a partir de los 4 años y medio) al operatorio, no se completa en algunos aspectos hasta los 8 años y medio aproximadamente. El conocimiento global del conjunto de los números naturales como una serie ordenada y conexa, la comprensión de las propiedades iterativas y otras, no se completa pues, en algunos casos, hasta 3º de Educación Primaria, pudiéndose encontrar obstáculos genéticos.

---

1 Fracciones positivas equivalentes a una cuyo denominador es potencia de 10.

2 Es claro que la equidistancia se refiere a parejas de puntos consecutivos, esto es, para todo número entero no negativo n distinto de cero, la distancia a su anterior ($n - 1$) y a su siguiente ($n + 1$) es igual a la que se establece entre el origen (0) y la unidad (1). Sin embargo, no es cierto que dados cualesquiera números naturales distintos n, m y r, las distancias entre ellos, dos a dos, sean iguales.

Estos aspectos permiten reformular la cuestión inicial en los siguientes términos: *¿Es posible construir una situación de optimización en el tránsito del número natural a la medida a partir de los conocimientos escolares propios del primer ciclo de Educación Primaria?* Esta pregunta no es retórica. La manipulación de objetos para medir longitudes no puede interpretarse siempre como un indicador empírico del saber “medida”. De hecho, los aspectos anteriormente señalados deben ponernos en guardia respecto al significado de las acciones de los sujetos, evitando interpretaciones apresuradas o infundadas (*ilusión de la transparencia*).

Restricciones institucionales

Las actividades docentes están encuadradas en el currículo oficial vigente y sus posibles concreciones de cada centro y cada profesor. No obstante, cada grupo-clase tiene una historia propia, que la diferencia y que condiciona los aprendizajes concretos de sus integrantes. Para que una situación didáctica sea operativa es necesario que inicialmente se pueda poner en marcha una estrategia de base. Esta estrategia supone la movilización de un saber previo.

Brousseau y Centeno (1991) demostraron que el contrato didáctico apropiado para esta movilización descansa en la *memoria didáctica* del profesor y del sistema. Esta memoria permite al profesor “utilizar el pasado particular de las clase y gestionar la articulación de los aprendizajes particulares con respecto a la historia de la clase y de los alumnos” Brousseau (2007, 108).

Acción y manipulación

A pesar de las reformas educativas posteriores a la Ley General de Educación y sus desarrollos (MEC, 1970), persisten huellas incontroladas del conjuntismo en el currículo vigente y en los materiales escolares para la enseñanza de las matemáticas en la escuela infantil y el primer ciclo de primaria (Lacasta y Wilhelmi, 2008).

El funcionamiento y control de sistemas didácticos se fundamenta en *contratos de aprendizaje empiristas*. Estos contratos presuponen que la repetición sistemática de una misma tarea en condiciones equiparables, permite al niño descubrir y aprender lo que de entrada no percibe. La utilización indiscriminada de las colecciones de fichas es un ejemplo palmario de lo expuesto. Más aún, los “contactos directos” en los contratos de aprendizaje empiristas se identifican frecuentemente con la mera manipulación de objetos físicos (MEC, 2007c, 478).

Sin embargo, la acción matemática supone el enfrentamiento a un medio (Brousseau, 1998), durante el cual existe una actividad física variada, que incluye la implicada en la comunicación verbal o gestual y en la representación iconográfica o escrita. A pesar del papel indudable que juegan todas estas acciones, no se debe confundir la actividad física con la actividad matemática, que, a menudo, cuando se intensifica, implica la interrupción de la actividad física.

La pregunta original puede formularse en los siguientes términos: *¿qué características debe tener una situación asociada a un problema de optimización en el tránsito del número natural a la medida en el primer ciclo de Educación Primaria?*

En la siguiente sección se describe una situación de aprendizaje por adaptación. Ha sido experimentada con tres grupos de 21, 21 y 23 integrantes. Esta experimentación ha tenido por fin el análisis de la dimensión cognitiva, como parte del análisis *a priori* en la ingeniería didáctica. Sin embargo, no se puede hablar todavía de *reproducibilidad* de la situación en sentido estricto, a pesar de que las acciones en los grupos han sido equiparables.

SITUACIÓN “¡QUE NO SE MANCHE LA ALFOMBRA!”

Material

- Una tira T de longitud 60 centímetros y anchura 5 cm, marcada con 24 marcas de 2,5 centímetros de largo[3] cada una (Figura 1a).
- Rectángulos de cartulina de la misma anchura que la tira T, de diferentes colores y cuyas longitudes son 1, 3, 5, 7 y 9, es decir, de 2,5; 7,5, 12,5; 17,5 y 22,5 cm. Habrá que disponer de un número grande, teniendo en cuenta las situaciones (al principio, cada grupo debe tener 3 de cada tipo). La longitud de cada una de estas cartulinas no está marcada, ni simbólica ni gráficamente (Figura 1b).
    - Hoja de pedido para la situación 3 y rotulador negro.
    - Tiras con el precio marcado en euros (Figura 1c).

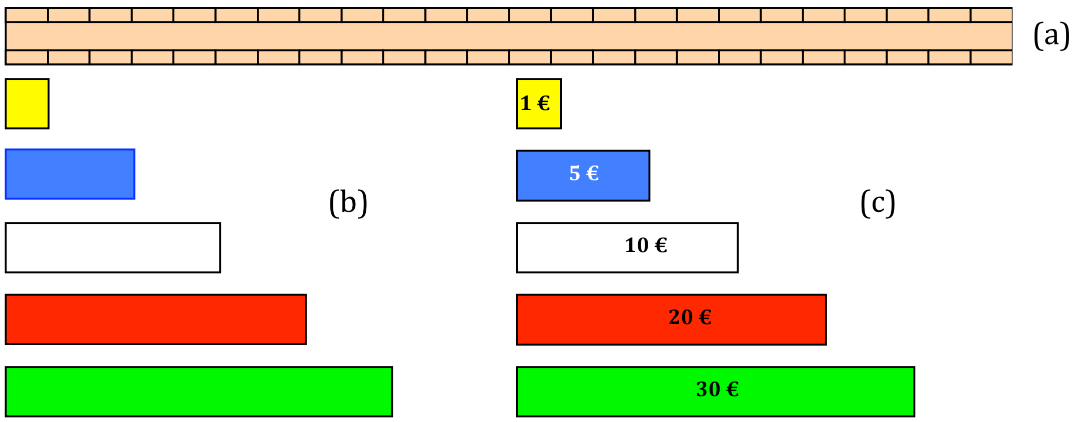

Figura 1. Material para la situación

Observaciones:

- El profesor, al referirse a las lonas, no mencionará ni el color ni su medida. Para ello, utilizará expresiones del tipo “clases o tipos de lonas”, “lonas diferentes”, etc.
- No está permitido el uso de regla ni de tijeras, para que la unidad de medida utilizada venga dada por las marcas en la tira T, de 2,5 centímetros.
- No está permitido el uso de rotuladores o pinturas de colores, para que en las fases de comunicación escrita las lonas se tengan que distinguir por sus medidas.

3 La longitud de la unidad de medida se debe a cuestiones técnicas de elaboración del material.

En estas edades, la representación de las lonetas mediante los rectángulos de cartulina y las convenciones métricas y manipulativas asociadas no plantean obstáculo alguno.

Situaciones

Presentación

Se organiza la clase en equipos de 4-5 integrantes. Se distribuye a cada grupo la tira T y las lonas. A continuación se comunica a todos lo siguiente:

> "Se ha colocado para una boda una alfombra estrecha que está representada por esta cartulina. Para que no se manche la alfombra, hay que cubrirla hasta el momento de la celebración. Para ello se dispone de lonas de la misma anchura que la alfombra, de distintos tamaños: como éstas (se muestran los rectángulos de colores y se cuelgan en un lugar visible de la clase). Estas lonas no se pueden cortar".

A continuación, se organiza la actividad en diferentes situaciones.

Situación 1: cubrir la alfombra y anotar la solución

Consigna: "Tenéis que cubrir toda la alfombra con las lonas que necesitéis, pero tened en cuenta que tenéis que tapar sólo la alfombra y no el suelo. Además, para que los que pisen no se tropiecen, no se puede poner una lona encima de otra".

Tiempo: 6 minutos. Distribución: 3 minutos para la manipulación inicial y la discusión en grupo; 3 minutos para la puesta en común.

Conocimientos matemáticos implicados. Son los inherentes:

- Al juego simbólico: correspondencia biunívoca de la alfombra, el suelo y las lonas protectoras con la tira T, la superficie de la mesa y las cartulinas de colores.
- Al control del espacio (ajuste de los extremos y bordes laterales de T a las cartulinas): nociones topológicas de frontera y adyacencia.
- A la aplicación del orden lineal (qué cartulinas van "antes", "primero" o "después"…) en las fases de comunicación y validación.

El conocimiento *medida* está ausente, porque basta que distingan las cartulinas (sus longitudes) por su color. Tampoco se precisa una estrategia de optimización.

Análisis de la tarea

- La realización sólo exige manipulación y procedimiento ensayo-error, sin implicación de la medida. Se trata de ajustar los extremos de T y de las cartulinas sin dejar huecos descubiertos. Por tanto, se pueden proponer soluciones distintas, todas ellas acordes con la consigna, realizadas con un mínimo de 4 cartulinas (Tabla 1).
- En la *comunicación* verbal y la *validación* de la puesta en común, se suscitará la necesidad de una convención de lenguaje y en algunos casos de una representación dibujada. La necesidad de diferenciar su realización de las demás obligará al portavoz de cada grupo a comunicar la cantidad, la clase y el orden de las cartulinas usadas.

- A lo largo de la puesta en común, se expresará y acordará el conocimiento de que el orden de colocación de las lonas es irrelevante. Esta circunstancia, dará pie al profesor a *institucionalizar* el saber “conmutatividad”.

Comportamientos esperados. Puede darse una representación incorrecta de la situación propuesta, por interpretación errónea de la consigna: utilización de todas las cartulinas disponibles, recubrimiento de la mayor superficie posible sin respetar la dimensiones de la tira T… Pero habrá grupos que respeten la consigna y optimicen espontáneamente el número de las cartulinas usadas teniendo en cuenta la longitud de las mismas. Es decir, que se inclinarán por alguna de las soluciones usando cuatro lonas (ejemplos 1, 2, 4, 5, 11 y 12 de la Tabla 1), eligiendo primero las cartulinas más grandes.

Puesta en común: El maestro pide que un representante de cada grupo explique verbal y manualmente en un lugar visible, cómo (con qué lonas y en qué posición) se ha resuelto la tarea.

Algunos comportamientos observados

En las fotografías (Figura 2) las niñas han organizado espontáneamente las “lonas” disponibles y han realizado la tarea propuesta, respetando la consigna y siguiendo una estrategia de base en la que no está presente un criterio de optimización explícito. Sin embargo, se prima el uso de las lonas más largas: todos los grupos salvo uno, utiliza al menos una lona verde (la más larga) y 11 de 14 grupos resuelven la tarea con solo 4 lonas (mínimo posible).

Lonas (color, longitud)	**verde, 9**	**rojo, 7**	**blanco, 5**	**azul, 3**	**amarillo, 1**		
Precio / Ejemplo	**30 €**	**20 €**	**10 €**	**5 €**	**1 €**	**Nº de lonas usadas**	**Precio total**
1	2	0	1	0	1	4	71
2	2	0	0	2	0	4	70
3	2	0	0	1	3	6	68
4	1	2	0	0	1	4	71
5	1	1	1	1	0	4	65
6	1	1	1	0	3	6	63
7	1	1	0	2	2	6	62
8	1	0	3	0	0	4	60
9	1	0	2	1	2	6	57
10	1	0	1	3	1	6	56
11	0	3	0	1	0	4	65
12	0	3	0	0	3	6	63
13	0	2	2	0	0	4	60
14	0	2	1	1	2	6	57
15	0	2	0	3	1	6	56
16	0	1	3	0	2	6	52
17	0	1	2	2	1	6	51
18	0	1	1	3	3	8	48
19	0	0	3	3	0	6	45
20	0	0	3	2	3	8	43
						Precio mínimo:	**43**
						Precio máximo:	**71**

Tabla 1. Ejemplos de soluciones posibles

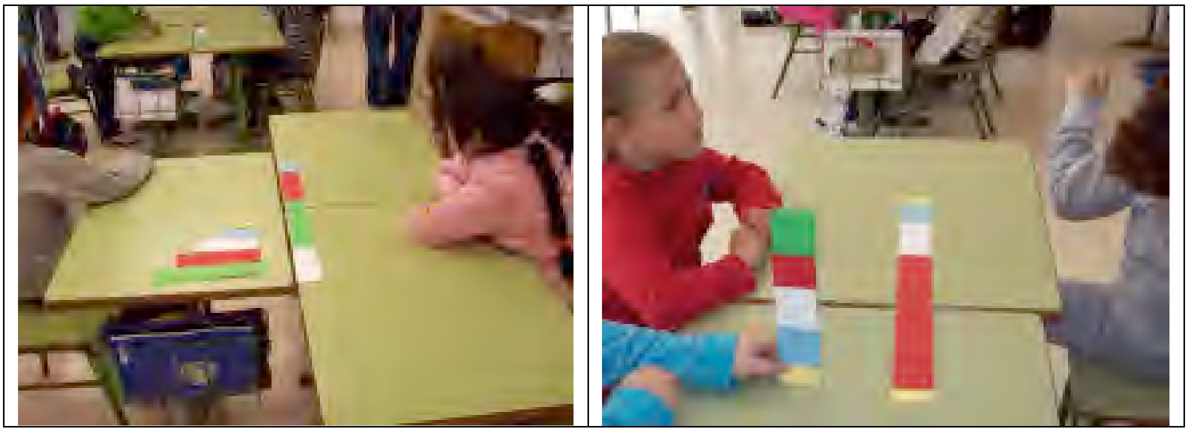

Figura 2. Estrategia de base y organización espontánea del material disponible

En el siguiente fragmento de transcripción de la situación videograbada, aparecen conocimientos referidos a la memoria de la clase. Probablemente la expresión "¡Espejo!" obedezca a alguna experiencia relativa a la simetría ya realizada.

> [A1]: amarillo, blanco, verde, amarillo, rojo, amarillo.
> [A2]: Lo ha puesto al revés [los dos niños pertenecen al mismo grupo].
> [M]: ¿Qué pensáis?… ¿Es esto importante? Alguna idea…
> [A3]: ¡Espejo!
> [A1]: Que de un lado se ve de un lado y del otro del otro [refiriéndose a ella que está en la pizarra y ve la distribución de una forma y a Oswaldo que está en su lugar y la ve de otra forma].
> [A4]: Que se puede empezar de un lado o del otro.
> [A5]: Da igual el orden.

El conocimiento de la conmutatividad es aceptado y no se enfrenta a un obstáculo anclado en la percepción espacial.

Situación 2: cubrir la alfombra con 6 lonas

Consigna: "Como veis, cada grupo lo ha hecho de una manera diferente… Ahora tenéis que cubrir la alfombra utilizando exactamente 6 lonas, es decir, ni más ni menos: 6"[4].

Por razones de espacio, no describimos detalladamente su desarrollo. Se supone un funcionamiento similar a la situación anterior y, por lo tanto, tras estas dos situaciones el grupo-clase se homogeneiza, garantizándose la comprensión de la situación y de las consignas dadas hasta ahora.

Situación 3: encargar por escrito 6 lonas para cubrir la alfombra

Consigna: "Después de tanto uso, se os han roto algunas lonas y no os queda más que una de cada tipo (el profesor retira las cartulinas sobrantes y las mete dentro de una caja). Teneis que pensar primero cómo lo vais a hacer, utilizando como antes 6 lonas, pero como máximo 3 de cada tipo. Una vez que lo hayáis pensado, escribir en la hoja que os he entregado las 6 lonas nuevas que vais a utilizar y yo os las daré para que

4 Si algún grupo ha resuelto la situación 1 mediante 6 lonas, el profesor le pedirá la búsqueda de otra solución.

comprobéis si la petición es correcta. Si os equivocáis, tened en cuenta que tendréis solamente una oportunidad más.”

Tiempo: 12 minutos.

Conocimientos matemáticos implicados

- Paso del espacio a la geometría, es decir, representar el material (cartulina rectangular) por medio de segmentos de longitud adecuada.
- Longitud de un segmento: medida.
- Descomposición de un número (24) en sumandos dados (1, 3, 5, 7 y 9). Adición de sumandos repetidos[5].
- Conmutatividad de la adición.

Análisis de la tarea

- Al disponer de una sola lona de cada tipo, la estrategia meramente manipulativa es ineficaz. Para resolver la tarea es preciso utilizar la medición. No obstante, puede haber estrategias mixtas, es decir, que den el número lonas de cada clase identificándolas por el color y no por su medida.
- Algún grupo puede identificar las lonas por su medida y utilizar éstas para formular el pedido en términos aritméticos.
- El procedimiento de validación es en ambos casos el cubrimiento de la alfombra con las lonas recibidas (según el pedido realizado).

Intervención del profesor. El profesor entrega el pedido sin hacer preguntas. Únicamente solicita información si no entiende lo que se le pide. En todo caso, evitará intervenciones que aporten conocimientos, indicios o pistas conducentes a la resolución del problema.

Puesta en común: Similar a la situación anterior. No obstante, si algún grupo no ha realizado la tarea, saldrá un representante en primer lugar y reproducirá en el lugar visible escogido por el maestro, la combinación de lonas siguiendo las instrucciones dadas por uno de los grupos que haya obtenido una solución.

Situación 4: cubrir la alfombra con el menor número de lonas

Consigna: “Como veis hay muchas formas de hacerlo… Es claro que cuantas menos lonas se utilicen, es más cómodo de realizar. Os propongo un nuevo problema: tenéis que decir cómo vais a cubrir la alfombra con el menor número de lonas. Tenéis que escribir en la hoja las lonas que vais a utilizar.”

Por razones de espacio, no describimos detalladamente. Se supone un funcionamiento similar a la situación anterior, resaltándose el papel de la media como medio de control y previsión.

Comportamientos esperados

Los grupos que hayan utilizado más de 4 lonas, como conocen la posibilidad de usar solo 4 por las soluciones dadas a la situación 1, procurarán adaptarse a ella.

Algunos comportamientos observados

5 La multiplicación se introduce en 2º de Primaria como suma de sumandos iguales, pero puede no existir como recurso operatorio rutinizado.

Todos los grupos resuelven la tarea con cuatro lonas. Asimismo, se suscita un debate para reducir este número. En el siguiente fragmento de transcripción, se observa cómo un alumno insiste en que se prueben propuestas de recubrimiento con 3 lonas.

[M]: Podemos hacerlo con menos de 4.
[A0]: Sí, tres verdes [El maestro coloca tres verdes].
[A1]: No, se sale.
[A0]: Dos verdes y una roja.
[M]: Vamos a comprobar. [El maestro coloca dos verdes y una roja y se comprueba que sobrepasa la longitud de la alfombra].
[A2]: ¡Que no, Manuel!
[A3]: ¡Se sale!
[M]: A ver Lidia…
[A4]: Se puede hacer en tres.
[M]: ¡Sal!
[A4]: Dos verdes y una blanca [Las coloca].
[A5]: ¡Falta!… ¡Faltaría una amarilla!
[A0]: Dos verdes y una roja.
[A1]: ¡Falta la amarilla!
[A4]: Se puede con tres.
[M]: ¿Cuál?
[A4]: Dos verdes y una roja.
[M]: Pero eso es lo que ha dicho Manuel…
[A6]: 2B y 1V.
[A5]: ¡Le falta por los dos lados!
[M]: ¿Alguna otra oportunidad?…
[A0]: ¡Tres verdes!

Hay dos conocimientos en juego: optimización y su recubrimiento. El niño A0 y la niña A4 se centran en lo primero.

Situación 5: cubrir la alfombra con coste mínimo

Consigna: "Las lonas más grandes son mucho más caras y las más pequeñas mucho más baratas. Os he puesto el precio en cada lona. Tenéis que calcular cómo vamos a cubrir la alfombra de forma que nos salga lo más barato posible."

Tiempo: 15 minutos.

Conocimientos implicados.

- Orden de un subconjunto finito de números naturales; máximo y mínimo asociados.
- Optimización: *variables*: número de lonas de cada precio (o longitud); *función objetivo*: precio total; *restricciones*: suma de las longitudes de las lonas igual a 24 y el máximo de lonas de cada clase es 3.
- La adición de sumandos repetidos se hace más frecuente, de tal manera que pueden aparecer procedimientos de cálculo por multiplicación.

Análisis de la tarea. El procedimiento tiene tres fases:

1. Selección de las lonas por su medida.
2. Calcular el precio asociado a cada forma de cubrir la alfombra.
3. Justificar si el cubrimiento es el de precio mínimo.

Puesta en común e intervención del profesor. El profesor preguntará grupo por grupo la solución o soluciones encontradas. El resto de grupos valorará la solución, esto es, determinará si ha encontrado una de menor, igual o mayor precio. En la Tabla 1 se ponen todas las posibles soluciones.

Algunos comportamientos observados

La longitud de las lonas amarillas y azules es 1 y 3 respectivamente. Se establece el *teorema en acto* (Vergnaud, 1990): "3 amarillas = 1 azul" (teniendo en cuenta tamaños), como se observa en la siguiente fragmento de transcripción.

> [A]: Hemos medido cuántos cuadrados necesitábamos y, como el cuadrado medía 3 y luego nos sobran 2, hemos puesto dos amarillas.

Sin embargo, no se establecen teoremas similares para las lonas blancas, rojas y verdes de longitudes 5, 7 y 9, respectivamente. El procedimiento de recubrimiento que se utiliza es completar "una gran parte" y después contar las marcas restantes, para utilizar los teoremas "3 amarillas = 1 azul". Es decir, establecen reglas operatorias sobre los números *visualizables*, pero no sobre la alfombra en su totalidad.

SÍNTESIS Y CUESTIONES ABIERTAS

Tal como se anuncia desde el título de este escrito, se tiene una situación, forzosamente definida previamente y sin experimentar (en el sentido dado en la ingeniería didáctica al término), y el propósito principal es el de realizar el análisis *a priori* de la misma. Esto nos ha obligado a guardar un compromiso entre la investigación y la realización empírica, no ausente de contradicciones. En concreto, se ha realizado una *observación preliminar*, que ha permitido el contraste entre los comportamientos esperados y los observados y que forma parte de la dimensión cognitiva del análisis *a priori*.

Solamente experimentaciones repetidas de la situación aquí diseñada, pueden abrir el camino a la realización de una ingeniería didáctica en sentido estricto. En este caso, se obtendría una investigación que aportaría conocimientos sobre condiciones de reproducibilidad de una situación didáctica en matemáticas y sobre la estructuración del medio.

Una situación reproducible garantiza la idoneidad de su aplicación en el aula y el logro de los aprendizajes pretendidos. De esta manera, se aportaría un nuevo elemento de didáctica normativa a los ya existentes y su aplicación escolar contribuiría al principal fin de la investigación didáctica, que es la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Además de las cuestiones más generales teórica (reproducibilidad) y normativa (citación de enseñanza) apuntadas en los párrafos anteriores, surgen interrogantes sobre el sentido atribuido a la optimización. ¿Hasta qué punto el grupo-clase responde a la optimización? ¿Qué influencia tienen las aportaciones del niño A0 y la niña A4 centradas en un criterio de optimización? ¿Se sabe si las soluciones con 4 lonas a la situación 4 han seguido este criterio? ¿Hay alguna razón que explique que 11 de 14 grupos resuelvan la tarea 1 usando "espontáneamente" el mínimo número de lonas?

Agradecimientos: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue M. (1989), Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 282–307.

Brousseau, G. (2007). *Introducción al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Zorzal.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G.; Centeno J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 11(2/3), 167–210.

Camacho, M., González A. (2001). Una aproximación a los problemas de optimización en libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92. *Aula* 10, 137–152.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Driscoll, P., Kobylski, G. (2002). A method for developing student intuition in nonlinear optimization. *PRIMUS.* 12(3), 277–286.

Lacasta E., Wilhelmi M. R. (2008). Juanito tiene cero naranjas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco, *Investigación en educación matemática XII*, 403–414.

Lowther, M. (1999). Optimization: A Project in Mathematics and Communication. *The Mathematics Teacher,* 92(9), 764-67, 812.

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.* Tesis doctoral. Pontificia Universidad Católica del Perú. [Disponible en (31 marzo 2009):

http://www.pucp.edu.pe/irem/Tesis_Doctoral_Uldarico_Malaspina_Jurado.pdf]

MEC (2007c). Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación infantil. *BOE* 4, de 4 enero, 474– 482.

MEC (2007b). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE* 5, de 5 enero, 677–773.

MEC (2007a). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE* 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *BOE* 293, de 8 diciembre, 43053–43102.

MEC (1970). Orden Ministerial de 12 diciembre, Aprobando las Orientaciones Pedagógicas para la EGB (incluye Educación Preescolar). Madrid: Autor.

Ministerio de Educación (MINEDU) (2009). Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular. Lima: Autor.

Pinto Carvalho, P. (2003). *Mathematical Optimization in Graphics and Vision*. Lima: IMCA.

Schuster, A. (2005). Kombinatorische Optimierung als Gegenstand der Gymnasialdidaktik im Umfeld von Mathematik- und Informatikunterricht. *Journal fuer Mathematik-Didaktik,* 26(1), 92–93.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 133–170.

Villers, C. (1997). Optimisation des les premières années du secondaire. *Mathématique et Pédagogie,* 112, 31–43.